

LXX олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 12 января 2023 года
X класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Юра и Маша играют в игру, в которой Маша, скрывая запись от соперника, записывает на окружности числа $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$, значения которых равны 1 или -1, и говорит Юре значения произведений чисел $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, a_2 \cdot a_3 \cdot a_4, a_3 \cdot a_4 \cdot a_5, \dots, a_{2021} \cdot a_{2022} \cdot a_{2023}, a_{2022} \cdot a_{2023} \cdot a_1$ и $a_{2023} \cdot a_1 \cdot a_2$. Может ли Юра на основании этих данных найти значение произведения $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2022} \cdot a_{2023}$? Обоснуйте свой ответ.
2. Утром Юрьева дня 1438 года аптекарь Мельхиор проснулся от того, что в дверь барабанил садовник Пиритаского монастыря брат Бент, который пришел с известием, что после вечернего богослужения у аббатисы монастыря Кандис начались ужасные боли в животе и имеются подозрения в попытке отравления. Мельхиора просили без промедления прийти в Пирита для расследования дела. Мельхиор собрал свой узелок и срочно вышел пешком в Пиритаский монастырь, расстояние до которого было равно одной длинной миле. Первые 3300 футов преодолел Мельхиор за 10 минут. Затем на своем пути он встретил паломника, который также держал путь в Пиритаский монастырь. Из-за разговора с паломником скорость движения Мельхиора упала на 10 процентов. После 20 минут совместного движения мимо них проезжала повозка со свечами для святых сестер, водитель которой решил подвезти путников. На повозке они двигались в три раза быстрее, чем двигался бы Мельхиор в одиночку, и через четверть часа они прибыли в Пиритаский монастырь. Сколько футов было в одной длинной миле?
3. Об отличных от нуля различных числах a, b, c, x, y и z известно, что $a = \frac{xy}{x+y}, b = \frac{yz}{y+z}$ и $c = \frac{zx}{z+x}$.
Найдите выражения A и B , зависящие от чисел a, b и c , при которых выполняется равенство, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{A}{B}$.
4. Сторона AD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярна сторонам AB и CD . Диагональ BD , длина которой равна a метров, делит данный четырехугольник на два подобных равнобедренных, но не равных треугольника.
 - 1) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.
 - 2) Покажите, что центр окружности, описанной около треугольника BCD находится на окружности, описанной около треугольника ABD .
5. В мешке находятся 2022 монеты. Катрин и Диана играют в игру, в которой они по очереди выполняют ход. Катрин в свой ход достаёт из мешка 5, 7 или 9 монет. Диана в свой ход возвращает обратно в мешок 2 или 3 монеты. Катрин побеждает, если после её хода в мешке остаётся меньше 10 монет. Диана побеждает если в какой-либо момент игры в мешке остается такое количество монет, которое делится нацело на 100. У кого имеется победная стратегия (т.е. стратегия, при которой игрок обязательно побеждает независимо от того как ходит соперник), если первый ход делает Катрин?